Ad-soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

Lineer Cebir II Bütünleme Sınavı Soruları **07.07.2021**

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına her zaman doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(Y) $AX = 0$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır (4 p).

(D) Sonlu bir kümenin her permütasyonu transpozisyonların çarpımı olarak yazılabilir (4 p).

(D) Her karakteristik vektör tek bir karakteristik değere karşılık gelir (4 p).

(D) Tersi olan her matrisin determinantı sıfırdan farklıdır (4 p).

(D) Bir kare matrisin bir satırının belli bir katını başka bir satıra eklersek determinant değişmez (4 p).

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A nın satırca indirgenmiş eşelon formunu bulunuz (7 p).

b) rank A=? (7 p)

c) A regüler midir? (6 p)

3) $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + 4y + z = c \end{cases}$ lineer denklem sistemi veriliyor. Sistemin

a) çözümünün olmaması için c ne olmalıdır? (10 p)

b) a şıkkında bulduğunuz c için çözüm nedir? (10 p)

4) a) $A = [a_{ij}] = [i - j]$ ve $B = [b_{ij}] = [\frac{i}{j}]$ olacak şekilde 3x3 tipinde iki matris yazınız. (10 p)

b) $AB = ?,\ BA = ?,\ A^2 = ?$ (4+3+3 p)

5) $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor (20 p).

a) Determinant yardımıyla A nın tersi olup olmadığını inceleyiniz.

b) Varsa A nın tersini bulunuz.

Cevaplar

2) a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{4R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[7R_2+R_3]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3/16]{-R_2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R_3+R_1]{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

b) rank $A = 3$

c) $A \approx I \Rightarrow A$ nın tersi vardır

3) a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & c-6 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_2+R_1]{-R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c-7 \end{array}\right]$

$c-7 \neq 0 \Rightarrow c \neq 7$ ise çözüm yoktur.

b) $c=7$ için sistemi çözelim.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\Rightarrow z = t$ dersek

$x + 7t = 1 \Rightarrow x = 1 - 7t$

$y - 5t = 1 \Rightarrow y = 1 + 5t$

$\Rightarrow t \in \mathbb{R}$ olmak üzere çözümler $(x,y,z) = (1-7t, 1+5t, t)$ şeklinde bir parametreye bağlıdır

4)

a) $A = [a_{ij}] = [i-j] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B = [b_{ij}] = [i/j] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & -8/3 \\ -2 & -1 & -2/3 \\ 4 & 2 & 4/3 \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/6 & -2/3 & -5/2 \\ 7/3 & -4/3 & -5 \\ 7/3 & -2 & -9/2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

5) a) $\det A = \begin{vmatrix} -6 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{6} - \cancel{6} + 15 - (-5 + 12 + 9) = 15 - 16 = -1 \neq 0$

$$\begin{array}{rrrrrr} & -6 & -3 & -1 & & \\ & 3 & 1 & -1 & & \\ & -5 & 2 & -1 & & 6 \\ -5 & -6 & -3 & -1 & & -6 \\ 12 & 3 & 1 & -1 & & 15 \\ 9 & & & & & \end{array}$$

$\Rightarrow A^{-1}$ vardır

b) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = -\operatorname{adj} A = -\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 11 & -3 \\ 4 & -9 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 2 & -11 & 9 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$